OVERSIGT OVER DET KGL. DANSKE VIDENSKABERNES SELSKABS FORHANDLINGER. 1915. N° 3–4.

SUR L'ORIGINE HISTORIQUE DE LA CONNAISSANCE DES QUANTITÉS IRRATIONNELLES.

PAR

H.-G. ZEUTHEN.

(PRÉSENTÉ DANS LA SÉANCE DU 7 MAI 1915.)

C'est avec satisfaction que j'ai lu les mémoires où M. Vogt et Mlle Sachs poursuivent la discussion sur l'origine historique de la connaissance des quantités irrationelles[1]. En effet, les

[1] Les contributions jusqu'ici données à cette polémique sont contenues dans les mémoires suivants:

G. Junge: Wann haben die Griechen das Irrationale entdeckt? Novae Symbolae Joachimicae, Halle 1907.

H. Vogt: Die Geometrie des Pythagoras. Bibl. Math. 9_3 1908—09 p. 15—54.

H. Vogt: Die Entdeckungsgeschichte des Irrationalen nach Plato und anderen Quellen des 4. Jahrhunderts. Bibl. Math. 10_3 1909—10 p. 97—155; désigné ici sous l'abréviation Vogt B M 10_3.

H.-G. Zeuthen: Sur la constitution des livres arithmétiques des Éléments d'Euclide et leur rapport à la question de l'irrationalité. Oversigt over det Kongl. Danske Videnskabernes Selskabs Forhandlinger 1910 p. 395—433, désigné sous l'abréviation: Zeuthen Oversigt 1910.

H.-G. Zeuthen: Sur les connaissances géométriques des Grecs avant la réforme platonicienne de la géométrie. Oversigt over det Kgl. Danske Videnskabernes Selskabs Forhandlinger 1913 p. 431—473; désigné par Zeuthen Oversigt 1913.

H. Vogt: Zur Entdeckungsgeschichte des Irrationalen. Bibl. Math. 14_3 1914—15, p. 9—29; désigné par Vogt B M 14_3.

E. Sachs: De Theaeteto Atheniensi mathematico. Diss. inaug. Berlin 1914. —

Les vues que je crois avoir démontrées dans Zeuthen Oversigt 1910, se retrouvent aussi dans mon discours, rapporté dans le compte rendu du congrés mathématique scandinave (Copenhague 1912) et dans mon article sur les mathématiques de l'antiquité et du moyen-âge dans Die Kultur der Gegenwart III, Leipzig 1912.

résultats de notre enquête — on en obtient toujours à la longue d'une polémique sérieuse où les différentes vues se rencontrent — commencent déjà à se dégager. Le domaine des vérités que nous nous accordons à regarder comme bien démontrées s'est élargi et, sur quelques points, j'espère l'élargir ici ultérieurement. D'un autre côté, nos exposés de diverses opinions sur les questions auxquelles on ne peut pas donner de réponse définitive auront élargi le champ des explications possibles. Pour mon compte, je note avec plaisir l'adhésion de M. Vogt (B M 14_3) à ce que je regarde comme le point principal de mon mémoire (Zeuthen Oversigt 1910), je veux parler de mon explication de la place que les trois livres arithmétiques occupent dans le système d'Euclide. M. Vogt pense comme moi que cette question ne saurait rester étrangère à la solution de celles qui nous occupent; M^lle^ Sachs adopte même mon opinion sur l'origine de ces livres. Et M. Vogt ne se borne pas à exprimer son adhésion sur le point que je viens d'indiquer: les opinions différentes des siennes que j'ai exposées soit dans la note déjà citée soit dans Die Kultur der Gegenwart et les arguments allégués à l'appui de ces opinions, il les rapporte avec une loyauté qui peut servir de modèle aux polémistes, et avec un soin qu'on n'accorde que rarement aux arguments de l'adversaire.

Néanmoins, son rapport de mes conclusions pourrait peut-être donner au lecteur cette impression que je m'étais permis d'émettre des hypothèses trop hardies sur des questions qui échappent à notre connaissance. Pour éviter ce reproche, je ferai remarquer que mes hypothèses sont des réponses, des essais d'interpréter les documents historiques dont M. Vogt avait tiré lui-même des conclusions énoncées à la fin de sa note précédente (Vogt B M 10_3). En démontrant la possibilité d'interprétations autres que les siennes, j'ai prouvé pour le moins que les conclusions de M. Vogt ne sont, elles non plus, que des hypothèses. Aussi ajoute-il à la fin de sa dernière note (Vogt B M 14_3) que les dates indiquées dans ses conclusions pour les différentes découvertes mathématiques ne prétendent être que des limites inférieures («au plus tard»). Voilà un nouveau point où nous sommes d'accord; car avec cette réstriction je les adopte volontiers. Cependant, ce n'est pas par la constatation de limites inférieures, mais par l'hypothèse de la réalité des dates en question que le premier mémoire de M. Vogt a intéressé les historiens des mathématiques, et c'est à cette hypothèse que j'oppose les miennes qui interprètent les mêmes documents d'une manière plus conforme, selon moi, à l'ordre naturel des progrès successifs et aux caractères qui distinguent la mathématique grecque, qui était en formation à l'époque qui nous occupe.

Il faut, en effet, chercher la raison de notre divergence dans nos conceptions différentes de la nature des découvertes qui constituent le développement historique des mathématiques. On est souvent trop porté à identifier l'état de la science, acquis à une certaine époque, avec la connaissance d'une certaine somme de vérités; selon cette manière de voir le développement conduisant à l'état atteint serait essentiellement constitué par la découverte positive de chacune de ces vérités complètes; la préparation des Éléments d'Euclide c'auraient été, par exemple, les découvertes successives des propositions y contenues. Une telle considération fait trop souvent oublier la grande valeur d'une découverte partielle d'un théorème, ou d'un procédé, après laquelle d'autres découvertes partielles tomberont à terre d'elles mêmes comme des fruits mûrs; une telle découverte permet souvent d'entrevoir le théorème ou le procédé général, et c'est alors que le grand mérite consiste à douter de cette généralité et à demander une démonstration générale qui en prouve la justesse ou qui conduise aux limites de cette justesse. La découverte, plus négative, de la nécessité d'une telle démonstration, ou les scrupules qu'on commençait à avoir au sujet de la portée des arguments dont on s'était contenté jusqu'alors marquent une étape du développement plus essentielle que mainte découverte positive, et se font souvent attendre longtemps à des époques où les progrès positifs se suivent rapidement et occupent l'attention des mathématiciens.

Dans l'histoire moderne des mathématiques, l'usage des séries infinies en offre un éclatant exemple. Après s'en être servi longtemps en des cas où la convergence était en réalité trop évidente pour que la nécessite de sa démonstration s'imposât, on a enfin compris qu'il était indispensable d'éprouver la convergence des séries pour avoir une vérification infaillible des résultats justes et un critérium permettant d'en séparer ceux qui ne le sont pas. On sait de même jusqu'à quel point les progrès mathématiques faits pendant le dernier siècle, et surtout ceux qui sont dus à Weierstrass, dépendent de découvertes du même ordre négatif, découvertes décelant la faiblesse de démonstrations qu'on avait longtemps regardées comme solides[1].

[1] Je crois que c'est par suite d'une divergence des points de vue ici énoncés qu'aux yeux de M. Vogt plusieurs de mes arguments semblent contradictoires. J'attribue, en effet, aux pythagoriciens l'intention de parvenir à l'aide de la représentation géométrique — qui transforme en constructions géométriques les opérations que nous renvoyons à présent à l'algèbre — à rendre les recherches également applicables aux quantités rationnelles et irrationnelles, et en même temps je suppose que les pythagoriciens ne savaient démontrer le théorème de Pythagore qu'au moyen de proportions, dont ils ne pouvaient posséder que pour les quantités rationnelles une théorie irréprochable (Vogt B M 14_3, p. 21—22). Cependant il n'est possible d'arriver d'une telle théorie à une autre qui comprenne aussi les quantités irrationnelles que par un passage à l'infini, formel ou latent, ce qui demande une explication précise; sans elle, le passage sera un «saut logique». Or c'est là ce que les pythagoriciens n'avaient pas encore découvert: ils pouvaient très bien croire qu'une vérité établie pour un nombre quelconque (nombre indéfini) reste vraie si le nombre (celui, par exemple, de parties égales d'un segment fini) prend une valeur infinie. Je n'accepte donc point la conclusion que M. Vogt tire d'une prémisse juste: »Sie (die Pythagoreen) haben überhaupt

Or l'ancienne découverte de quantités irrationnelles a été la première occasion à de telles découvertes négatives; elle joue encore aujourd'hui un rôle principal dans ce domaine. Le premier pas a été la découverte de l'irrationalité de $\sqrt{2}$

nicht das Bewustsein von der unvollständigen Begründung ihrer Proportionslehre gehabt; dann können sie die Kenntnis des allgemeinen Irrationalen nicht früh besessen haben«. La connaissance de l'irrationalité de certaines quantités, telles que, par exemple, les racines carrées de nombres entiers, et l'observation du saut logique qu'on fait en passant à l'infini sont, en effet, deux progrès distincts, dont pourtant l'un a pu suggérer l'autre; mais alors il me semble plus probable, et plus conforme à l'ordre ordinaire des progrès logiques de cette nature, que la dernière observation a été faite par un homme qui remarquait les erreurs dont la possibilité n'a été décelée que par la découverte des irrationnelles. C'est trop demander aux pythagoriciens qu'ils fassent cette constatation immédiatement après la découverte de quantités irrationnelles.

C'est Zénon qui a fait remarquer le saut logique qu'on fait en passant à l'infini, et je crois avec Paul Tannery (Pour l'histoire de la science hellène p. 248 s.) qu'on comprend mieux ses paralogismes en y voyant une polémique contre les pythagoriciens; de mon côté j'ai pensé particulièrement à la faute qu'ils commettraient en généralisant, malgré leur connaissance de quantités irrationnelles, les résultats de leur théorie arithmétique des proportions (Zeuthen Oversigt 1910, p. 433). Toutefois Zénon donnait à ses paralogismes une forme philosophique et générale, qui ne pouvait révéler l'existence de quantités irrationnelles à ceux qui ne la connaissaient pas déjà (remarque à l'adresse de Mlle Sachs, p. 58, fin de la note 3 de la p. 57). Tout en ayant reçu une suggestion par la découverte de ses adversaires, ce qui n'est nullement rare dans une polémique, où il s'agit souvent de montrer les contradictions des adversaires (cette remarque s'adresse à M. Vogt B M 14_3, p. 18), il s'est élevé au dessus des considérations mathématiques auxquelles il croyait porter un coup irrémédiable. En effet, les géomètrès ont un besoin absolu de passages à l'infini: même s'ils avaient eu quelque autre démonstration du théorème de Pythagore les pythagoriciens auraient dû avoir recours à un tel passage pour généraliser les propositions qui traitent des proportions ellesmêmes, et Démocrite en a eu besoin pour mesurer le cône et la pyramide. Le seul véritable moyen de compléter les démonstrations dépendant d'un passage à l'infini, mais dans lesquelles on avait pourtant une confiance intuitive, devait consister dans une explication de ce qu'exprime en réalité un tel passage. Le postulat d'Eudoxe en donne l'explication, mais on s'en est servi sous des formes différentes: dans l'antiquité on évitait de parler d'un passage à l'infini en faisant usage d'une réduction à l'absurde que permet le postulat; de nos que tout le monde est d'accord pour attribuer aux pythagoriciens: elle a été fondamentale pour la science mathématique. Mes adversaires me rappellent que moi aussi je me

jours on s'en sert pour définir exactement le dit passage. C'est seulement après Eudoxe qu'Euclide, voulant renvoyer au livre V une théorie des proportions fondée sur le dit postulat a eu besoin d'inventer pour son livre I une démonstration du théorème de Pythagore qui fût indépendante des proportions.

Il est possible d'ailleurs que les pythagoriciens, dont nous ne connaissons pas du tout les démonstrations, soient parvenus aux proportions générales d'une manière qui leur a caché le passage à l'infini. Ils ont pu, en effet, faire usage de la même intuition géométrique de figures semblables qui permet à Hippocrate d'établir les théorèmes dont il a besoin dans sa quadrature des lunules (Zeuthen Oversigt 1913, p. 447—451); alors on a pu établir le théorème de Pythagore par la démonstration de M. Naber (Zeuthen Oversigt 1913, p. 472). Dans ce cas, on aurait même tiré de la représentation géométrique un bénéfice qui n'aurait nullement été permis après l'introduction des principes platoniciens. —

Je remarquerai encore ici que Théodore et Théétète ont très bien pu faire usage du théorème d'Euclide X 2 sans penser à la nécessité de le faire précéder par un théorème équivalent à X 1 (Vogt B M 14_3, p. 27—28); mais je reviendrai sur ce point, dont du reste je m'étais exprimé moi-même d'une manière trop vague (Zeuthen Oversigt 1910, p. 405).

Quant aux exemples (Vogt B M 14_3, p. 14) de la divulgation des doctrines géométriques et en particulier de celles des pythagoriciens, je renverrai à ce que j'ai dit des auteurs en question dans Zeuthen Oversigt 1913.

M. Junge dit p. 9: «Diese Fragen (sur l'égalité de rapports de quantités incommensurables) sind zu dringend, dass eine Theorie des Irrationalen, die nur ein wenig über den Spezialfall von $\sqrt{2}$ hinausging, unmöglich schon viele Jahrzehnte vor Eudoxus gefunden sein kann». C'est méconnaître, ce me semble, à la fois l'immense progrès fait par l'invention du postulat d'Eudoxe, et par sa définition des proportions et la lenteur qui caractérise ordinairement les progrès d'une telle nature théorique, lenteur que j'ai illustrée par des exemples modernes. Du reste M. Junge indique à la même page une autre possibilité en renvoyant, comme nous venons de le faire, à l'usage de la connaissance intuitive des propriétés des figures semblables.

Tandis que de mon côté je suppose un progrès assez rapide de la connaissance de faits (tels que l'irrationnalité de $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$...) pour laquelle on a déjà surmonté la difficulté théorique (en démontrant l'irrationalité de $\sqrt{2}$), MM. Vogt et Junge attribuent au développement des vues théoriques une rapidité non moins hypothétique.

suis étonné de rencontrer chez les pythagoriciens cette découverte d'une vérité si contraire à leur propre essai de regarder le nombre entier comme le principe de tout. Aussi j'ai ajouté plus tard que précisément cette découverte d'une exception au dit principe montre combien ils ont pris au sérieux leur tentative pour l'établir. Tout le monde reconnaîtra non seulement l'importance de cette découverte, mais aussi la finesse logique et mathématique dont elle témoigne. Elle est l'œuvre d'un véritable penseur mathématicien, et sa démonstration ne réussirait qu'à un homme assez versé au calcul. Pour un tel homme et pour ceux qui ont compris ses raisonnements il n'y a pas eu de raison pour croire que $\sqrt{2}$ soit une exception; au contraire, s'ils se sont servis de la démonstration classique[1] de l'irrationalité de $\sqrt{2}$ (ce que M. Vogt et M^{lle} Sachs semblent supposer avec moi) ils auront été à même de voir qu'un raisonnement analogue s'applique à $\sqrt{3}$, etc. Pour ma part, je garderai mon opinion là-dessus jusqu'à ce que je voie de bonnes preuves historiques de leur ignorance à cet égard, et je montrerai plus loin pourquoi je n'en trouve pas dans le « Théétète » de Platon.

Cependant, l'irrationalité de $\sqrt{2}$ montre déjà qu'il existe des quantités irrationnelles et suffirait ainsi au besoin des métaphysiciens et des mystiques de l'école; c'était un « instar omnium » comme plus tard la duplication du cube de sa multiplication. Il suffisait aussi pour justifier cette irrationalité de renvoyer à la division populaire des nombres en pairs et impairs. L'existence d'une telle tradition relative à $\sqrt{2}$ et sa continuation à une époque où la connaissance de quantités irrationnelles autres que $\sqrt{2}$ est bien constatée historiquement se montre à la plupart des passages où Aristote

[1] Je désignerai ainsi la démonstration suivante (Euclidis Elementa ed. Heiberg III, p. 408): Si dans l'equation $m^2 = 2n^2$ m et n sont des nombres entiers premiers entre eux, m doit être un nombre pair et n un nombre impair. Or il résulte, par la substitution de $m = 2r$ que $2r^2 = n^2$. Donc n doit être pair.

parle de l'irrationnel[1]; elle ne démontre donc aucunement que les mathématiciens pythagoriciens n'en connaissaient pas d'autres; mais elle suffit pour expliquer qu'aucune démonstration bien formulée de l'irrationalité des autres racines antérieure à celle de Théodore, n'est parvenue à la connaissance de Platon. Nous ne savons pas même si leurs doctrines se sont répandues autrement que par communication orale.

Il faut encore se rappeler qu'avant Platon on demandait à une démonstration autre chose que ce que ses disciples mathématiciens crurent bon d'exiger, et il ne faut pas penser qu'il y ait lieu pour cela de mépriser ces démonstrations antérieures qui ont eu un autre point de départ, mais dont les conclusions ont pu être assez logiques. Dans le système d'Euclide, préparé par l'école de Platon la base de toutes les démonstrations consiste en suppositions exprimées sous forme de définitions ou de postulats, et on en demande toujours les moins composées. Logiquement parlant, elles sont donc les plus simples; mais cette simplicité n'est obtenue que par une abstraction. Ce qui s'est présenté d'abord à la pensée, ce sont au contraire les suppositions intuitives qui comprennent des notions totales, celle par exemple de l'existence de figures congruentes ou superposables l'une à l'autre, et celle de figures semblables. Euclide lui-même ne sait se passer entièrement de l'idée intuitive de la superposition: il s'en sert non seulement pour définir l'égalité (I, axiome 7), mais il en fait un usage plus direct dans la démonstration du théorème I, 4; et j'ai montré ailleurs (Zeuthen Oversigt 1913) qu'Hippocrate de Chios a su fonder sur l'idée intuitive de la similitude des démonstrations satisfaisantes des théorèmes qui font le point de départ de ses recherches sur les lunules.

[1] M. Wieleitner a bien voulu me communiquer qu'au moyen âge on ne connaissait en fait d'irrationnelles que $\sqrt{2}$, et, vu qu'on devait alors à la seule tradition toute connaissance de ce genre, cela ne m'étonne pas.

Il existe dans l'arithmétique de semblables vérités intuitives qui s'imposent à tous ceux qui sont habitués à calculer, et qui leur inspirent à bon droit la même confiance absolue que les dites intuitions géométriques. En soutenant qu'un nombre ne peut être à la fois divisible et non divisible par 3, on énonce une vérité de cette nature. Si elle ne présente pas une analogie absolue avec la division des nombres en pairs et en impairs, elle résulte du moins de la division analogue en nombres donnant les restes 0, 1, 2; et de même pour tout diviseur donné. Grâce à cette considération, on a dû voir de bonne heure que la démonstration classique de l'irrationalité de $\sqrt{2}$ s'applique presque immédiatement à l'établissement de celle de $\sqrt{3}$, ou de la racine carrée de tout autre nombre non carré. Ce ne serait là qu'un des fruits mûrs dont j'ai parlé, et s'il était tombé aux mains de Théodore cela n'aurait pas mérité la mention de Platon.

Ce qu'il dit de Théodore dans le dialogue intitulé «Théétète» ne s'applique pas même à la démonstration dont je viens de parler. Nous apprenons, en effet, que Théodore s'est occupé des différentes racines $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ ... séparément et qu'il s'est arrêté à $\sqrt{17}$. Or l'application de la démonstration en question à ces différentes racines ne présenterait que cette seule différence qui résulte de la substitution d'un nouveau nombre à celui dont on part. Une telle répétition du même raisonnement est certainement inconnue dans l'histoire des mathématiques. Actuellement, nous désignons par une lettre un nombre qui peut prendre des valeurs différentes; mais depuis les premiers commencements des mathématiques jusqu'à l'introduction d'un tel symbole général on a su se tirer d'affaire d'une manière assez simple en donnant au nombre arbitraire une valeur simple quelconque et laissant au lecteur le soin de voir qu'on y peut substituer tout autre nombre conforme à l'énoncé du théorème à démontrer ou au problème à résoudre. Diophante fait ainsi, et Fermat utilise encore le même procédé pour démontrer la quadrature que nous exprimons à présent par $\int x^{\frac{p}{q}} dx$: en donnant à p et à q les valeurs 1 et 2 ou 2 et 3 il s'en sert d'une manière qui ne laisse aucun doute sur la généralité du résultat acquis[1]. EUCLIDE fait de même: dans son livre V, il fait dès les premières propositions, usage des mêmes multiples, $m a$ et $m b$ de deux quantités a et b représentées par des segments de droites, et la démonstration demande que le multiplicateur m puisse prendre la valeur d'un nombre entier quelconque; mais dans la figure illustrant ses opérations il doit se contenter de lui donner une valeur déterminée. Il choisit les plus simples: 2, 3 . . ., laissant au lecteur à voir que la substitution d'un autre multiplicateur ne changerait rien à sa démonstration. Certainement THÉODORE aurait fait de même s'il s'était servi d'une démonstration identique, sauf pour le nombre dont il faut extraire la racine. Peut-être déjà les mathématiciens pythagoriciens ont-ils même osé regarder $\sqrt{2}$ comme un «instar omnium» de la même démonstration. Il ne s'agit pas en tout cas d'une induction[2], qui ne gagnerait du reste rien à un nombre fini de répétitions, mais de l'intelligence de ce fait que la démonstration ne dépend pas de la valeur du nombre choisi.

Il faut donc que THÉODORE se soit servi d'une autre démonstration qui l'ait obligé à s'occuper séparément des différentes racines, ou que la répétition ait porté sur quelque chose en dehors de la démonstration. M. VOGT a choisi la dernière alternative en émettant (Vogt B M 10_2, p. 101—5) cette hypothèse que la répétition a eu trait aux constructions nécessaires pour assurer l'existence géométrique des quantités qui ne sont pas exprimables en nombres et qui

[1] Voir Mathematikens Historie i XVI og XVII Aarhundrede p. 373 (édition allemande p. 267).

[2] Il doit y avoir un malentendu à la p. 27, 2e alinéa de Vogt B M 14_3. M. VOGT y soutient, en effet, ma thèse sur la nouveauté des arguments dont THÉÉTÈTE a dû se servir.

n'ont ainsi aucune existence arithmétique. On peut fonder ces constructions relatives aux différentes racines carrées sur le théorème de PYTHAGORE: en s'en tenant aux plus simples, ou à celles qu'on croit les plus naturelles à un géomètre de l'époque de THÉODORE, on les verra prendre des formes assez différentes entre elles pour avoir justifié la répétition qu'il s'agit ici d'expliquer. Ensuite un des progrès dus à THÉÉTÈTE aurait, selon M[lle] SACHS (p. 53), consisté à substituer à ces différentes constructions une construction uniforme pour toutes les racines carrées, à savoir celle de la moyenne proportionnelle, dont EUCLIDE se sert dans le même but (X 6, corollaire).

Il est vrai que l'avantage théorique des constructions qui donnent une existence géométrique aux quantités irrationnelles devait beaucoup intéresser PLATON. Et pour nous, il y aurait intérêt à apprendre ainsi que THÉODORE avait remarqué le premier la généralité des opérations géométriques et qu'il avait pleine conscience de l'avantage théorique qu'elles présentent. Quoi qu'il en soit, l'invention de ces constructions ne pouvait présenter de sérieuses difficultés à une époque où nous voyons HIPPOCRATE de Chios manipuler si bien les applications du théorème de PYTHAGORE et où le même HIPPOCRATE indique la réduction de la multiplication du cube à la construction de deux moyennes proportionnelles. Quant à l'exécution de la construction d'une seule moyenne proportionnelle ou de la transformation constructive d'un rectangle en un carré de la même aire, il l'aura connue aussi bien que les auteurs des Sulbasutras indiennes. Probablement il s'en est servi par exemple pour construire le segment $a\sqrt{\frac{3}{2}}$, dont il fait usage dans sa construction de lunules carrables. A supposer donc que, dans le passage qui nous occupe, PLATON ait voulu parler de ces constructions, le progrès attribué à cet égard à THÉÉTÈTE serait illusoire, et les constructions attribuées à THÉODORE n'intéresseraient pas par leur propre nouveauté, mais seulement comme signes de la conscience de l'importance théorique de telles constructions.

C'est du reste — je l'avoue — avec raison que M. VOGT (B M 14_3, p. 20—21) signale la difficulté de dater la naissance de cette conscience. L'algèbre géométrique a été précédée d'une arithmétique géométrique dont les constructions avaient pour objet des quantités qu'on savait exprimer numériquement. Indépendantes qu'elles sont de la représentation numérique, elles auront été appliquées immédiatement aux quantités qu'on ne savait pas exprimer sous forme de nombres et aussi aux quantités dont la représentation numérique avait été reconnue impossible, c'est à-dire aux quantités irrationnelles. La représentation de $\sqrt{2}$ par la diagonale d'un carré semble être aussi ancienne que la connaissance de son irrationalité[1], et nous venons de parler de l'ancienneté de la construction géométrique d'autres racines carrées de nombres entiers et même d'une fraction. On a donc su de bonne heure tirer bénéfice dans la pratique de la représentation géométrique. Je pense que l'étonnement ou même l'effroi qu'excitait la découverte de quantités irrationnelles a pu porter les mathématiciens à y voir de bonne heure aussi un avantage théo-

[1] Ordinairement, on rattache la découverte elle-même de l'irrationalité de $\sqrt{2}$ à l'essai de mesurer la diagonale; mais il ne faudrait pas confondre les symboles familiers aux rapporteurs et aux lecteurs de leur communication avec les faits représentés par les symboles — mes lecteurs ne doivent pas croire par ex. que dans l'antiquité on se servait du signe $\sqrt{\ }$—. C'est pour cette raison que dans «Die Kultur der Gegenwart» j'ai montré par l'exemple de la musique des pythagoriciens (voir Vogt B M 14_3, p. 16—17) que des questions étrangères à la représentation géométrique, qui servait avant tout de symbole dans leurs recherches arithmétiques, portaient à chercher une valeur rationnelle de $\sqrt{2}$, et ensuite à se demander, s'il en existe. C'est du reste P. TANNERY qui a eu l'idée de rapprocher la détermination de valeurs approchées de $\sqrt{2}$ de l'intercalation de tons entre ceux qui ont l'intervalle d'une octave (Mémoires scientifiques III, p. 86; Bibliotheca mathematica 3_3, p. 172). On sait que dans le cadre pythagoricien la musique occupait la place d'une des quatre sciences mathématiques, et qu'une partie de leurs recherches sur les proportions y était renvoyée.

rique[1]; mais historiquement je ne puis documenter qu'une limite inférieure de la découverte de cet avantage théorique. Elle a dû, en effet, précéder la construction inventée par ARCHYTAS de deux moyennes proportionnelles, car ni sa construction stéréométrique ni les solutions du même problème trouvées par EUDOXE et par MÉNECHME n'ont pu devoir l'approbation qu'elles allaient obtenir à des avantages pratiques. L'origine pythagoricienne des doctrines d'ARCHYTAS fait supposer que déjà dans cette école on a remarqué qu'en donnant à l'algèbre une forme géométrique on en rendait les applications plus générales. Pourquoi les pythagoriciens n'auraient ils pas vu cela avant THÉODORE?

Pour ces raisons, la manière dont M. VOGT essaie d'expliquer ce fait que THÉODORE s'est occupé successivement des différentes racines jusqu'à $\sqrt{17}$ ne me paraît pas fort satisfaisante en elle-même, et au surplus elle ne répond pas bien aux termes que dans le dialogue PLATON attribue à THÉÉTÈTE[2]: «Pour l'étude des carrés THÉODORE nous avait fait des figures afin de montrer sur les carrés dont les aires étaient de 3 ou 5 pieds carrés que leurs côtés ne sont pas commensurables au côté du carré de l'aire 1 (*ὅτι μήκει οὐ ξύμμετροι τῇ ποδιαίᾳ*). Il avait fait la même chose pour chacun des carrés jusqu'à celui de 17 pieds carrés. Il s'arrêta là». Ces paroles me semblent indiquer que c'est la démonstration de l'incommensurabilité que THÉODORE a fait pour $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ ... $\sqrt{17}$ séparément. Il faut donc se demander, s'il n'existe pas une démonstration de l'incommensurabilité de racines carrées qu'il faut faire séparément pour les différentes racines et qui en même temps pourrait exciter l'intérêt de PLATON et suggérer à THÉÉTÈTE le désir d'aller plus loin.

[1] Ce qui ne revient pas à dire qu'ils eussent vu toute de suite tous les avantages théoriques et les demandes qui doivent s'y rattacher (voir p. 336 note).

[2] Voir VOGT B M 10_3, p. 99 ou Zeuthen Oversigt 1910, p. 396.

Nous avons vu qu'une simple généralisation de la démonstration classique de l'irrationalité ne satisferait ni à l'une ni à l'autre de ces demandes. Il faut plutôt penser à l'introduction de quelque nouveau principe, et on en trouve probablement une indication dans l'usage du mot *ξύμμετρος*, commensurable, qu'on rencontre pour la première fois dans le texte cité et que THÉODORE a substitué à celui de l'expression *ρητὸς* «effable» des pythagoriciens[1]. A partir de THÉODORE, on ne demande donc pas s'il est possible ou non d'exprimer telle quantitè par un nombre entier ou une fraction, mais si la quantité en question est commensurable à l'unité ou non. Ce changement indique une véritable précision mathématique de la question, parce qu'on a une méthode bien déterminée pour éprouver la commensurabilité. A cet effet, on se sert du procédé servant à déterminer la plus grande mesure de deux nombres donnés: si cette opération, appliquée à des quantités générales représentées par des segments de droites, s'arrête d'elle même, les quantités seront commensurables, si elle se continue à l'infini, incommensurables.

Voilà la réponse qu'on trouve en consultant EUCLIDE, notre meilleure autorité à cet égard, sur l'usage que les géomètres grecs faisaient du mot «commensurable» et sur la manière d'éprouver la commensurabilité. Le dit procédé sert de point de départ, dans son livre VII, pour l'étude des quantités rationnelles, et, dans son livre X, pour celle des quantités irrationnelles. Nous sommes d'avis que cette introduction d'une nouvelle dénomination n'est nullement fortuite, et que THÉODORE a créé une théorie digne de la mention qu'en fait PLATON, en conséquence il nous paraît probable que THÉODORE a pris pour base de sa théorie le critère que

[1] C'est M. VOGT qui a attiré l'attention sur ce point. Voir le tableau VOGT B M 10_3, p. 142.

nous venons d'énoncer[1] et que nous appellerons pour plus de commodité le «critère de THÉODORE» tout en n'envisageant préalablement qu'à titre d'hypothèse son usage direct des procédés qui s'y rattachent.

D'ailleurs, la meilleure confirmation de l'explication obtenue ici par un rapprochement des mots employés par PLATON et de l'usage qu'en a fait EUCLIDE s'obtient en essayant d'appliquer immédiatement le «critère de THÉODORE» pour éprouver la rationalité de racines carrés: nous verrons alors que cette épreuve prend des formes différentes pour les racines des différents nombres entiers[2]. C'est là précisément la première demande que nous avons dû poser à l'explication, et jusqu'à présent on n'a proposé aucune autre explication qui y satisfasse.

A première vue, mon hypothèse sur le «critère de THÉODORE» ne s'accorde pas bien avec le fait que tout en parlant des racines $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, etc. PLATON n'attribue à THÉODORE rien qui ait rapport à $\sqrt{2}$: il reconnaît ainsi la connaissance antérieure de l'irrationalité de $\sqrt{2}$, tandis que celles des autres racines serait une découverte de THÉODORE[3]. Eh bien! si l'on ne croit pas que l'éminent découvreur inconnu de l'irrationalité de $\sqrt{2}$ a vu que son raisonnement s'applique aussi bien à d'autres racines dont il fallait au moins soupçonner

[1] Voilà ce que je trouve plus digne de l'approbation de PLATON que ne le serait la découverte de l'irrationalité de $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ . . ., celle de $\sqrt{2}$ étant déjà connue. Mlle SACHS (p. 52) apprécie autrement les valeurs des différents progrès mathématiques, en quoi je pense qu'elle ne s'écarte pas moins de la manière de voir de PLATON qui s'intéressait tout particulièrement aux progrès théoriques.

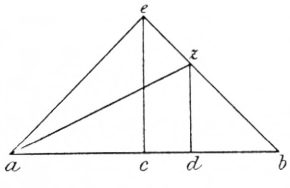
[2] Voir Zeuthen Oversigt 1910, p. 423—425. M. VOGT (B M 14_3, p. 26) en demande une «litterarische Beglaubigung». Mon renvoi à PLATON et à EUCLIDE satisfait à cette demande pour le procédé général; quant aux applications particulières, on ne doit pas en attendre, vu que THÉÉTÈTE allait bientôt obtenir les mêmes résultats d'une manière plus générale. Nous allons voir du reste qu'on s'est servi d'un procédé semblable pour trouver des valeurs approchées de $\sqrt{2}$.

[3] Vogt B M 14_3, p. 16; Sachs p. 51.

l'irrationalité, il ne serait pas moins incroyable que Théodore ait dû avoir recours à d'autres moyens pour la démontrer, et mon hypothèse sur son procédé pourrait donc rester intact, mais de mon côté je ne crois pas que le procédé de Théodore a conduit le premier à la découverte de l'irrationalité de $\sqrt{3}$ etc., et je ne vois dans le silence de Platon relativement à $\sqrt{2}$ aucune preuve décisive que $\sqrt{2}$ est la seule racine dont on ait connu l'irrationalité avant Théodore. Certainement Théodore a dû employer en première ligne son procédé à éprouver si la première quantité irrationnelle (ἄρρητος) qu'on ait connue, à savoir $\sqrt{2}$, satisfait au critère servant à établir son incommensurabilité avec 1. Et il doit avoir trouvé — sous la forme géométrique dont il s'est servi —:

$$\sqrt{2} = 1 + (\sqrt{2} - 1) = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}+1} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \dots}} = \frac{\sqrt{2}+2}{\sqrt{2}+1}$$

Les approximations auxquelles conduirait son algorithme (même sans aucun usage formel d'une fraction continue) seraient 1, $\frac{3}{2}$, $\frac{7}{5}$, $\frac{17}{12}$..., dont chacune, $\frac{y_1}{z_1}$, est formée de la précédente, $\frac{y}{z}$, par la substitution de $y_1 = y + 2z$, $z_2 = y + z$; on trouve, en effet, en substituant $\frac{y}{z}$ à $\sqrt{2}$ dans la dernière des expressions que nous venons de trouver: $\sqrt{2} = \frac{y_1}{z_1}$. Or ces approximations étaient connues des pythagoriciens [1], probablement avant Théodore, et



[1] C'est F. Hultsch qui a observé que selon le commentaire de Proclos à la République de Platon la série d'approximations indiquées ici est due aux pythagoriciens (Bibl. math. 1_3). P. Tannery avait déjà montré qu'elle était connue par Platon (Revue philosophique XI, p. 291), et de mon côté j'avais montré que les théorèmes 9 et 10 du livre II des Éléments d'Euclide contiennent sous forme géométrique la démonstration générale de ces approximations (Keglesnitslæren i Oldtiden, Vidensk. Selsk. Skrifter (6) III_1, p. 24; édition allemande p. 28. Voir aussi mon Histoire des Mathématiques).

EUCLIDE II,9 en contient sous forme géométrique la démonstration probablement pythagoricienne. Dans la figure de cette démonstration *abe* est un triangle rectangle et isoscèle, moitié d'un carré à la diagonale *ab*; *ec* et *zd* sont des perpendiculaires à *ab*. Au moyen des triangles rectangles *aez* et *adz* on voit que

$$ae^2 + ez^2 = ad^2 + zd^2,$$
$$2\,(ac^2 + cd^2) = ad^2 + db^2.$$

Posons ici $db = y$, $cd = z$; alors $ac = y + z = z_1$, $ad = y + 2z, = y_1$, de sorte que

$$y^2 - 2z^2 = -[(y + 2z)^2 - 2\,(y + z)^2] = -(y_1{}^2 - 2z_1{}^2).$$

Si l'on commence par $y = 1$ $z = 0$, on obtiendra ainsi de nouvelles solutions des équations

$$y^2 - 2z^2 = \pm 1$$

par quantités croissantes, ce qui donne précisément les numérateurs et les dénominateurs des valeurs approchées de $\sqrt{2}$ que nous venons d'indiquer. Si, au contraire, on pose $ad = ae = ac\,\sqrt{2}$, ou $y_1 = z_1\,\sqrt{2}$, on aura aussi $y = z\,\sqrt{2}$ c'est-à-dire l'identité que nous commencions par établir. Or poser $ad = ae$ c'est l'opération prescrite pour chercher la plus grande mesure commune de la diagonale *ab* et du côté *ae* d'un carré. Cette recherche coïncide donc essentiellement avec l'opération qui avait fourni les valeurs approchées déjà connues de $\sqrt{2}$.

L'identité des opérations devait frapper PLATON, qui connaissait déjà la méthode utile pour substituer approximativement par exemple une diagonale rationnelle (*διάμετρος ῥητὴ*) 7 à la diagonale irrationnelle (*ἄρρητος*) du carré au côté 5, et elle devait lui montrer que la dernière diagonale et le côté satisfont aussi au critère bien formulé de quantités incommensurables (ἀσύμμετροι). Théodore a pu faire remarquer la même chose; mais ce qu'il a dû y avoir de nouveau chez lui, c'est, à côté de l'énoncé formel du critère, son application à la question de la commensurabilité des quantités $\sqrt{3}$, $\sqrt{5} \ldots \sqrt{17}$ à l'unité. Voilà ce que Platon pouvait très bien mentionner tout en sachant bien que les pythagoriciens ont su que les mêmes racines sont irrationnelles dans un sens moins bien formulé selon lui.

Ceci est possible, c'est même assez probable, et la seule possibilité de cette autre explication des paroles du dialogue de Platon défend d'en conclure à l'ignorance attribuée aux pythagoriciens; mais en tout cas l'existence des approximations de $\sqrt{2}$ et de leur démonstration géométrique montre qu'il a été assez naturel d'attribuer à Théodore l'idée d'éprouver la rationalité de racines carrées de la manière que nous avons supposée ici, soit que les approximations de $\sqrt{2}$ lui fussent déjà connues, comme nous venons de l'admettre, soit qu'on n'y ait été conduit que par son application de l'algorithme de la plus grande mesure commune.

Du reste l'explication que nous venons d'indiquer n'est nullement la seule possible. On remarquera, en effet, que dans le dialogue la mention de Théodore ne sert que d'introduction à l'éloge de Théétète, et que Platon ne prétend pas faire un historique des irrationnelles. Il veut pourtant rendre justice aux pythagoriciens, en rappellant que déjà avant Théodore on avait reconnu l'existence de grandeurs irrationnelles. Il le fait en omettant la racine à laquelle s'est attachée la première découverte, la seule peut-être pour laquelle on lui eût rapporté une démonstration bien formulée (voir p. 340). D'après les principes introduits par l'école de Platon, une telle démonstration devait s'appuyer sur un postulat qui était non seulement évident mais en même temps bien formulé. Or, on avait déjà admis la division des nombres en pairs et impairs; mais aucune formulation analogue ne nous est conservée qui se rapporte à d'autres diviseurs[1].

C'est donc comme fondateur de la théorie générale des «incommensurables» que PLATON cite THÉODORE pour parler ensuite des contributions de THÉÉTÈTE au sujet de la même théorie, et jusqu'à nouvel ordre je supposerai que ce fondement a été le «critère de THÉODORE». Je dois donc montrer comment en réalité les contributions de THÉÉTÈTE telles qu'elles nous sont parvenues — selon moi et selon M^{lle} SACHS — par le VII^e livre d'EUCLIDE se rattachent au dit point de départ. Malgré sa généralité au point de vue théorique le «critère de THÉODORE» ne se prête pas bien à l'épreuve pratique de la rationalité d'une quantité donnée quelconque. Son application aux racines $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5} \dots \sqrt{17}$ pouvait être réalisé par THÉODORE, et nous savons pourquoi. C'est la périodicité des fractions continues servant à exprimer les racines carrées qui montre que l'opération prescrite par le dit critère, et qui est identique à celle dont dépend le développement en fractions continues, doit se continuer à l'infini. Cette periodicité se sera présentée d'elle même pour les racines carrées dont THÉODORE s'est occupé, mais il n'a pas possédé une démonstration générale de la périodicité. Et on n'était pas à même de décider si, oui ou non, l'application du même procédé aux racines d'ordre supérieur de nombres entiers et aux racines de fractions se continuerait à l'infini. Une application immédiate du critère de THÉODORE ne conduirait donc à rien pour ces racines.

Nous ne doutons pas que THÉÉTÈTE n'eût été en état

[1] Sous ce point de vue, qui est assez essentiel ici, je n'hésite pas à répondre «Ego» à la question de M^{lle} SACHS (p. 51): «Nam demonstrationem ad $\sqrt{2}$ pertinentem eodem quo reliquas vitio laborare, quis est, qui negat?» Personnellement je trouve absolument satisfaisante la démonstration classique de l'irrationalité de $\sqrt{2}$; et on peut rendre satisfaisantes les démonstrations analogues de celle des autres racines carrées (voir p. 341).

de faire un choix de postulats assez simples et assez intuitifs pour servir de fondement de démonstrations moins artificielles de l'irrationalité des racines de nombres entiers que celles qu'on trouve dans le livre VII d'EUCLIDE — cette faculté je l'ai attribuée en partie à ses prédécesseurs et même à ceux de THÉODORE —, mais l'objectif qu'il visait dans son système raffiné a été de conformer ses critères au critère général de la commensurabilité que nous avons attribué à THÉODORE, et il a obtenu en même temps des critères de la rationalité de racines de fractions. Déjà le parallélisme au commencement des livres VII et X d'EUCLIDE, où il traite de la détermination de la plus grande mesure commune de deux nombres entiers et l'application de la même méthode aux quantités irrationnelles, indique, en effet, que l'auteur du livre VII a voulu se conformer au critère de l'irrationalité demandé dans X,2. C'est à cette détermination qu'il rattache ensuite celle des «parts $\left(\frac{p}{q}\right)$ qu'un nombre a est du nombre b», p et q étant les nombres qui résultent de la division de a et b par leur plus grande mesure commune, et j'ai montré[1] comment l'univocité de la dite opération conduit alors à la condition de la rationalité d'une racine quelconque $\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$ d'une fraction $\frac{a}{b}$. Il résulte en effet, de VII,27 et de VIII,2 que $\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$ sera commensurable à l'unité si, après qu'on aura réduit la fraction $\frac{a}{b}$ à ses plus petits termes, a et b sont des $n^{\text{ièmes}}$ puissances des nombres entiers, et seulement dans ce cas, en admettant bien entendu que le «critère de THÉODORE» de la commensurabilité, et par conséquent aussi le critère correspondant de l'incommensurabilité, est à la fois suffisant et nécessaire. Voilà pourtant ce qu'EUCLIDE n'admet pas sans la démonstration ultérieure qu'il donne au commencement du livre X. J'ai donc eu tort de dire (Oversigt 1910, p. 414) que déjà dans

[1] Voir ZEUTHEN Oversigt 1910 p. 403 et p. 409 s.

les nos 19 et 27 du livre VII EUCLIDE est «en pleine possession» de la condition nécessaire et suffisante de la rationalité de la racine d'une fraction ou d'un nombre entier, et aussi de dire (p. 423) que les recherches dans les livres VII et VIII rendent superflu l'usage du X,1-2. En effet, dans les dits livres la commensurabilité, et par conséquent la rationalité, n'est éprouvée qu'au moyen du critère de THÉODORE.

On reconnaît ainsi, mieux que je ne l'ai fait voir dans le travail cité, le rôle que joue le commencement du livre X dans le système d'EUCLIDE. Ayant vu qu'il ne suffit pas de regarder la commensurabilité ou l'incommensurabilité comme suffissamment définies par le «critère de THÉODORE», et qu'au contraire en le faisant on fait une supposition, il énonce formellement dans X,1 cette supposition, qu'il démontre au moyen du postulat d'EUDOXE, et il en déduit ensuite la suffisance du critère de l'incommensurabilité qui est en même temps celui de la nécessité du critère de la commensurabilité. Il établit ensuite l'identité entre la commensurabilité de deux quantités éprouvée par le critère et la possibilité d'en exprimer le rapport par celui de deux nombres entiers, et c'est cette possibilité qu'il a assurée en ne regardant pas sans démonstration l'énoncé du «critère de THÉODORE» comme suffisant pour définir la commensurabilité.

Le théorème X,1 énonce que, deux quantités inégales étant données, si de l'une on enlève plus de sa moitié, et du reste plus de la moitié et ainsi de suité, on finira par parvenir à un reste plus petit que l'autre quantité donnée, et EUCLIDE le démontre à l'aide du postulat d'EUDOXE énonçant qu'il existe un multiple de l'une de deux quantités données qui vaut plus que l'autre, postulat qui est contenu dans la définition 4 du livre V. THÉODORE et THÉÉTÈTE n'ont donc pas pu en faire usage; mais d'un autre côté on n'aurait pas, avant EUDOXE, pensé à la nécessité de rattacher au critère l'énoncé formel d'une vérité aussi évidente que celle qu'exprime le dit théorème, qui à cet égard ne le cède pas beaucoup au postulat d'Eudoxe. Sans doute, à l'époque de Théodore on n'avait pas encore l'habitude d'énoncer formellement les suppositions évidentes dont on allait faire usage dans les démonstrations et, du temps de Théétète, c'est tout au plus si cet usage commençait à s'établir, et il est probable qu'on a mis du temps à les remarquer et à les séparer des démonstrations. Dans le cas qui nous occupe, on n'en a pas même senti le besoin logique, parce qu'on pouvait regarder le critère comme une définition de la commensurabilité. Il y a donc plutôt lieu d'admirer Euclide d'avoir remarqué l'existence d'une supposition latente qu'oublient souvent les auteurs modernes que de s'étonner qu'on ne s'en fût pas aperçu au premier abord. Étant donné la lenteur avec laquelle se présentent toujours les scrupules de cette nature, et dont nous avons déjà parlé, il n'est pas même probable que celui dont nous parlons se soit présenté à l'esprit des géomètres immédiatement après l'invention, due à Eudoxe, d'une formulation permettant de surmonter les scrupules provenant d'un usage plus direct de considérations infinitésimales.

L'existence du théorème 1 du livre X d'Euclide ne nous défend donc nullement d'attribuer le critère qui nous occupe à Théodore, et à Théétète la démonstration contenue dans les livres VII et VIII d'un théorème (X,9) qu'on s'accorde à lui attribuer. Je viens de montrer que cette démonstration prend pour point de départ le même critère, et de donner de bonnes raisons pour y voir l'héritage laissé à Théétète par Théodore. J'espère donc avoir justifié, aux yeux de ceux qui consentent à attribuer la dite démonstration de X,9 à Théétète, la désignation: «critère de Théodore».

M. Vogt ne consent qu'en partie à la dernière attribution. Il est d'avis qu'elle laisserait moins aux successeurs de Théétète et en particulier à Euclide lui-même que ce qui leur est dû selon les rapports de Proclus[1]. Peut-être le consolera-

[1] Voir Vogt B M 14_3, p. 24.

t-il de voir que je ne soutiens plus ici la suffisance absolue de la démonstration attribuée à THÉÉTÈTE. En parlant «de la théorie de l'irrationalité de racines à laquelle THÉÉTÈTE a apporté les derniers perfectionnements», j'avais pensé (Zeuthen Oversigt 1910, p. 400) à celle qu'on trouve (sous forme d'une démonstration de la rationalité) dans les les livres VII et VIII. Or, comme je viens de l'expliquer, le point de départ de cette théorie est un critère de la commensurabilité dont EUCLIDE a trouvé nécessaire de démontrer la nécessité au commencement du livre X, ce qui coïnciderait avec le témoignage de PROCLUS cité par M. VOGT, et d'après lequel «EUCLIDE établissait par des démonstrations incontestables beaucoup de ce que ses prédécesseurs n'avaient prouvé qu'imparfaitement».

Ce point n'est pas le seul où l'on constate, dans la théorie des irrationnelles, un important progrès dû à un successeur de THÉÉTÈTE, peut-être à EUCLIDE. M. VOGT et M[lle] SACHS citent, en effet, le renseignement suivant contenu dans un commentaire arabe, mais dû originairement à EUDÈME: THÉÉTÈTE a divisé les lignes irrationnelles (*ἄλογοι*, catégorie qui d'après sa nomenclature, qui est encore celle d'EUCLIDE, ne comprend pas les racines carrées de nombres rationnels) en trois classes, à savoir celles que nous représentons à présent par $\sqrt{\sqrt{a}\sqrt{b}}$, $\sqrt{a} \pm \sqrt{b}$, où $\sqrt{a}$ et $\sqrt{b}$ sont des racines incommensurables entre elles. Il en résulte que THÉÉTÈTE a démontré que ces quantités sont incommensurables aux racines carrées de nombres rationnels (EUCLIDE X,21, 36, 73). Il a donc ébauchée la classification de quantités irrationnelles qu'on trouve dans EUCLIDE; mais la continuation, qui comprend les quantités $\sqrt{a \pm \sqrt{b}}$ et l'importante condition de leur réduction aux catégories précédentes (EUCLIDE X,54 91) est due à ses successeurs.

Je résumerai maintenant les résultats que je crois avoir acquis par mes présentes recherches, en commençant par ceux pour lesquels j'espère trouver l'adhésion de mes interlocuteurs (nº 1 et, en partie du moins, nºˢ 2 et 3).

1. Dans la démonstration des conditions de la rationalité de racines qu'on trouve dans les livres VII et VIII des Éléments, EUCLIDE prend pour point de départ le critère de la commensurabilité qui dépend d'une application du procédé servant à trouver la plus grande mesure commune. Et voilà pourquoi il ne peut en tirer les conditions suffisantes de l'irrationalité de racines (X,9) qu'après avoir démontré par une application du postulat d'EUDOXE (X,1) la suffisance du critère correspondant de l'incommensurabilité (X,2).

2. La démonstration contenue dans les livres VII et VIII est due à THÉÉTÈTE, le supplément qui se trouve au commencement du livre X, à un de ses successeurs, probablement à EUCLIDE.

3. Le critère de la commensurabilité et de l'incommensurabilité dont nous venons de parler, THÉÉTÈTE le devait à THÉODORE, dont selon PLATON il continuait les recherches. Ce critère est en parfait accord avec l'emploi du mot *ξύμμετροι* dans le dialogue et avec la méthode qu'EUCLIDE emploie pour éprouver la commensurabilité; son emploi donne la seule explication satisfaisante de la démonstration successive de l'irrationalité de $\sqrt{3}$, $\sqrt{5} \ldots \sqrt{17}$; et il concorde bien avec les valeurs approchées de $\sqrt{2}$ que connaissaient les pythagoriciens, et avec la démonstration (EUCLIDE II,9) des mêmes approximations. Je n'hésite donc plus à donner à ce critère le nom de THÉODORE.

4. La connaissance de l'irrationalité de $\sqrt{2}$ est antérieur à THÉODORE, et de la mention dans le «Théétète» de PLATON d'une théorie générale fondée sur la notion de commensurabilité on ne peut rien conclure d'autre sur l'étendue des connaissances antérieures de racines irrationnelles (*ἄρρητος*) et, en particulier, il n'en ressort pas que leurs prédécesseurs aient ignoré l'irrationalité d'autres racines carrées. Mes études compara-

tives des rares communications qui nous sont parvenues sur les notions mathématiques et sur les vues générales avant EUCLIDE et les formes qu'ont pris plus tard les démonstrations des mêmes vérités dans les Éléments, ainsi que mes considérations sur l'enchaînement mathématique des différentes vérités et des démonstrations qui y conduisent et sur l'ordre naturel dans lequel elles ont pu se présenter me portent toujours, malgré les objections qu'on y a faites, à croire que:

5. La connaissance de l'irrationalité d'autres racines irrationnelles a suivi immédiatement celle de l'irrationalité de $\sqrt{2}$;

6. La découverte de l'irrationalité de $\sqrt{2}$ remonte assez loin, peut-être à PYTHAGORE; cette dernière attribution repose[1] sur le fait que son nom est le seul que, dans l'espace de temps dont il s'agit, nous connaissions d'un penseur assez profond pour soulever et répondre à une telle question.

Cependant il faut avouer que dans tous les arguments que j'ai émis en faveur de mes thèses 5 et 6 — ou plutôt des hypothèses 5 et 6 qu'en tout cas je trouve probables — j'ai supposé que la démonstration classique de l'irrationalité de $\sqrt{2}$ rémonte à sa découverte par les pythagoriciens. M. VOGT et Mlle SACHS me semblent partager cette opinion et la prendre, eux aussi, comme point de départ de leurs explications; mais M. JUNGE soutient (p. 9 et p. 23) à cet égard des opinions assez différentes. D'après lui, on ne possède aucune preuve historique de l'ancienneté et de l'origine pythagoricienne de la démonstration en question qu'ARISTOTE rappelle avec prédilection. D'un autre côté il reconnaît (p. 23) l'origine pythagoricienne des approximations de $\sqrt{2}$ dont nous avons parlé à la p. 348, et il semble même disposé à croire (p. 18—19,

[1] J'ignore si les philologues rejettent nettement l'interprétation des paroles de PROCLUS (Friedlein p. 65, 19) qu'on a regardées jusqu'à présent comme fondement de cette attribution, ou si seulement ils admettent d'autres versions comme possibles ou même plus probables.

note) que la prémière découverte de l'irrationalité de $\sqrt{2}$ a été provoquée par les dites approximations.

Je reconnais qu'en combinant une telle hypothèse avec mes thèses 1—3 on aurait une suite[1] des progrès mathématiquement possible qui s'accorde avec les renseignements historiques directs. Rien n'est en effet plus naturel que de supposer que de vains essais d'exprimer $\sqrt{2}$ au moyen d'une fraction aient porté à se demander si l'échec était seulement une conséquence de l'insuffisance des moyens qu'on avait essayés ou si peut-être la solution de ce problème était impossible en elle-même, question qui témoigne d'ailleurs d'une grande pénétration. Or nous avons vu que les pytha-

[1] Je n'ai pas besoin de dire que M. Junge, qui ne pouvait connaître mes thèses 1—3, et qui cherche avec soin à éviter de faire des hypothèses, n'est nullement responsable de l'hypothèse sur le développement successif que je vais exposer ici, pour dire ensuite pourquoi je ne l'adopte pas malgré l'avantage que je lui reconnais. Pour ma part, je regarde du reste les hypothèses comme indispensables, non seulement pour préparer des opinions mieux fondées, mais aussi pour comprendre nos sources assez bien pour en tirer quelque profit. Les courtes notices que nous y trouvons sont, en effet, souvent susceptibles de différentes interprétations, dont on doit éprouver la possibilité en les admettant hypothétiquement et en essayant de les combiner avec les autres renseignements historiques que nous possédons. Même le choix de l'interprétation qui semble au premier abord la plus littérale est une hypothèse qu'il faut éprouver de la même manière. M. Junge fait une telle hypothèse en tirant des expressions que Platon attribue à Théétète (Vogt B M 10_3, p. 100, Zeuthen Oversigt 1910, p. 397) la conclusion (p. 22) que la distinction des pythagoriciens entre «carré» et «hétéromèque», ces mots pris dans un sens qui justifierait la connaissance des irrationnelles, n'est pas antérieure à Théétète. Comme les expressions du dialogue ne sont pas absolument exactes — elles feraient par exemple croire que $\sqrt{3 \,.\, 12}$ est irrationnelle — on peut aussi douter de la nécessité d'une explication littérale relative à l'origine de la terminologie dont Platon a besoin pour expliquer assez brièvement les résultats acquis par Théétète.

Dans la longue note à la p. 337 (p. 338) nous avons vu que MM. Junge et Vogt n'évitent pas non plus les hypothèses relatives à une prétendue nécessité ou probabilité mathématique. Mes hypothèses sont de la même nature; seulement, nous ne sommes pas d'accord sur la question de savoir ce qui est mathématiquement nécessaire ou probable.

goriciens possédaient une règle qui leur permettait de trouver des fractions s'approchant de plus en plus de $\sqrt{2}$, et que le procédé qui y sert se continue de lui-même à l'infini. Peut-être ont-ils cru en pouvoir conclure à l'impossibilité en question. La véritable démonstration qu'on peut obtenir ainsi reposerait de manière ou d'autre sur l'identité du procédé appliqué avec celui qui sert à déterminer la plus grande mesure commune de $\sqrt{2}$ et de 1. Alors on comprendrait bien que, par une généralisation de la même méthode, Théodore soit parvenu à établir l'irrationalité de $\sqrt{3}, \sqrt{15} \ldots \sqrt{17}$ et ensuite Théétète, par ses recherches plus subtiles, celle d'autres racines — d'une manière qui avait toutefois besoin d'être sanctionnée par le commencement du livre X d'Euclide. Dans cette hypothèse, c'est-à-dire *si l'on suppose que la démonstration classique n'a été inventée qu'après Théodore*, il n'y aurait aucune raison de ne pas lui attribuer la première découverte de l'irrationalité de $\sqrt{3}$, etc., et je devrais abandonner mes hypothèses 5 et 6. La démonstration classique n'aurait donc été inventée qu'après coup, et par sa simplicité et évidence immédiate elle aurait satisfait les philosophes et les autres qui se souciaient plus de l'existence d'une seule quantité irrationnelle que du système mathématique dont s'occupaient les géomètres.

Tout cela est *mathématiquement possible*, je viens de le dire; ainsi compris, le développement de la théorie des irrationnelles prendrait un cours rectiligne, et on retrouve, dans Euclide, des traces de tous les progrès indiqués par les sources historiques. Seulement, cette marche des progrès, je suis tenté de la trouver trop rectiligne; car le développement d'une science se fait toujours par des détours permettant de s'orienter mieux, tandis que les sources historiques nous conservent de préférence les progrès qui conduisent le plus directement au but en négligeant les autres. Et ce qui est mathématiquement possible n'est pas toujours *psychologiquement* probable. Un développement suivant pas à pas les Éléments d'EUCLIDE depuis les suppositions les moins complexes, énoncées dans les définitions et les postulats, serait par exemple mathématiquement possible, le serait même par excellence. Cependant, qui croit que l'ordre systématique des Éléments serait en même temps l'ordre historique de l'édification de cette œuvre monumentale? Trop souvent les historiens ont été pourtant guidés dans leur jugements sur les faits rapportés dans les sources historiques par des vues empruntées au système où il a fallu plus tard leur assigner une place toute différente de celle qu'ils avaient occupée d'abord; en le faisant on n'a pas remarqué que, dans les systèmes, les vues théoriques sont en général plus récentes que la connaissance d'une partie des faits auxquels elles se trouvent adaptées, et que ce sont avant tout les vues théoriques qui se développent lentement[1].

Dans le cas présent, il s'agit de savoir si la découverte de quantités irrationnelles s'est faite d'abord au moyen du critère de THÉODORE et de son application précédente, plus ou moins directe, à $\sqrt{2}$, ou si elle a été faite antérieurement au moyen d'autres considérations et en particulier de celles qui nous sont conservées dans la démonstration «classique» relative à $\sqrt{2}$. Malheureusement nous devons nous contenter de former des hypothèses sur l'âge de cette démonstration; car l'attribution de son invention au siècle où elle apparaît pour la première fois n'est pas moins hypothètique que son renvoi à un siècle précédent. Conformément à ce que j'ai exposé dans mes hypothèses 5 et 6, je crois qu'elle a précédé celle de THÉODORE, et alors elle a pu lui être très antérieure. En faveur de cette hypothèse je citerai l'application pythagoricienne du mot *ἄρρητος*, qui indique qu'en réalité les pythagoriciens se sont occupés de quantités irrationnelles

[1] Je renvoie à cet égard à Zeuthen Oversigt 1913. Il est possible que moi-même j'aie parfois reculé trop la conscience des avantages théoriques de la représentation géométrique (voir la p. 344 de la présente note).

avant l'introduction du nouveau point de vue marqué par le mot *ασύμμετρος*, et je renvoie aux faits que j'ai déjà cités comme signes d'une telle connaissance antérieure; mais il faut encore se demander quelle empreinte portent les différentes démonstrations, tout en se rendant compte qu'un jugement sur ce point sera assez personnel.

A ce point de vue, il m'est assez difficile de m'imaginer que la première découverte des irrationnelles soit due à une recherche aussi systématique que celle de THÉODORE, même sous la forme qu'elle a prise d'abord dans son application à $\sqrt{2}$. Là aussi elle aura été difficile à retenir sans l'application des symboles géométriques qui jouaient alors le même rôle qu'ont pris dans la suite les symboles algébriques. De tels symboles se prêtent mieux à retenir à la fois une suite d'idées et à les continuer dans une direction une fois adoptée qu'à suggérer des idées entièrement nouvelles; celles-ci sont plutôt dues à une certaine intuition. Dans le cas qui nous occupe, la question n'a pas été celle de mesurer la diagonale d'un carré, ce qui n'était que le symbole de l'extraction de $\sqrt{2}$, mais le but direct était de trouver, faute d'un nombre entier, une fraction qui multipliée par elle même donne 2. Un tel point de vue arithmétique était avant tout naturel aux pythagoriciens avec leur culte du nombre et dont les mérites mathématiques les mieux vérifiés, y compris ceux qui ont égard à la musique, sont de nature arithmétique. Or la démonstration classique est arithmétique malgré la forme géométrique qu'on lui a donnée pour mieux la retenir; elle s'appuie même sur la distinction entre pair et impair qu'ARISTOTE cite au nombre des antithèses pythagoriciennes. D'autre part, malgré sa simplicité et son exactitude, elle occupe selon moi une place trop isolée au milieu des autres recherches que les Grecs ont mis plus tard en rapport avec la question de rationalité pour qu'il soit naturel de la rapporter à l'époque de PLATON, où le principal moyen d'assurer les vérités mathématiques consistait à en faire des parties d'un entier solide et systématique, et où la construction d'un tel entier absorbait une grande partie de l'intérêt qu'on vouait à la mathématique élémentaire.

Cependant si l'on me donne de bonnes raisons historiques pour ne pas attribuer aux pythagoriciens la démonstration que j'ai appelé — à tort, il est vrai, dans le cas considéré — la démonstration classique, j'abandonnerai mes hypothèses 5 et 6, et mes thèses 1—3 auront ainsi un soutien de plus.

Copenhague, en octobre 1914.